محمود نصیری

تفکر هندسی و مفهوم‌های هندسی

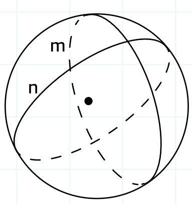
داستان موازی‌ها

در قسمت‌های قبلی دو خط موازی را تعریف کردیم.

دو خط را که در یک صفحه واقع باشند و هیچ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، موازی گوییم.

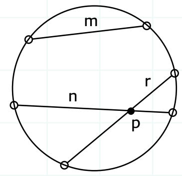
این یک تعریف است، اما اینکه در کجا و در چه دنیای هندسی این تعریف وجود دارد، خود داستانی دیگر است.کودکان معمولاً دوست دارند روی شن‌ها بازی کنند. شاید گاهی مشاهده کرده‌اید که آن‌ها با به‌کار بردن انگشتان خود یا وسیلهٔ دیگری، خط یا خط‌هایی را روی شن‌ها رسم می‌کنند. بیایید فکر کنیم که این خط رسم شده تا کجا می‌تواند ادامه پیدا کند؟ یا این کودک تا چه اندازه می‌تواند آن را ادامه دهد؟ دنیای کودکان محدود است. اگر از کودک بپرسیم: آیا می‌توانی خطی بلندتر رسم کنی؟ و یا: تا چه اندازه می‌توانی خط بلندتری رسم کنی؟ احتمالاً با این پاسخ روبه‌رو خواهید شد که: «به‌طور حتم می‌توانم خطی بلندتر رسم کنم.» نظر شما چیست؟ آیا واقعاً این کار امکان دارد؟ اگر شما فکر می‌کنید چنین امکانی وجود دارد، حتماً فراموش کرده‌اید که ما روی یک صفحهٔ کروی شکل زندگی می‌کنیم. اگر فرض کنیم که چنین امکانی وجود دارد و می‌توانیم این خط را ادامه دهیم، مسلماً ما دوباره به نقطهٔ شروع بر می‌گردیم. می‌توانیم این را روی یک توپ نیز نشان دهیم. در واقع این خط‌های ما دایره‌ای هستند. در قسمت‌های قبلی نیز توضیح دادیم که تمام دایره‌های روی کره که مرکز آن‌ها مرکز زمین باشد، خط‌های ما در هندسه‌ای هستند که روی کره برقرار است و آن را «هندسهٔ روی کره» می‌نامند. به‌عبارت دیگر، چیزی به نام خط روی کرهٔ زمین، آن‌گونه که ما در «هندسهٔ اقلیدسی» تصور می‌کنیم و به‌عنوان خط راست می‌شناسیم، وجود ندارد. ما فقط می‌توانیم چیزی رسم کنیم که شبیه یک خط است، اما در حقیقت خط‌ها یک دایره و پاره‌خط‌ها قسمت‌هایی از کمان‌های یک دایره هستند (شکل ۱).

شکل ۱



با این تصور از خط و تعریف دو خط موازی که هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند، مشاهده می‌کنیم که روی کرهٔ زمین هیچ دو خط موازی وجود ندارد و همهٔ خط‌ها متقاطع‌اند.

حال اگر دنیای دیگری را تصور کنیم و فرض بگیریم در دنیای ما، تمام نقطه‌ها درون یک دایره باشند و وترهایی از این دایره را که دو سر آن‌ها خالی است، در نظر بگیریم و آن‌ها را به‌عنوان خط بپذیریم (شکل ۲)، بر خلاف دنیای قبلی، این بار از نقطهٔ p دو خط n و r با خط m هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. در واقع، از نقطهٔ p دو خط به موازات خط m رسم شده‌اند.

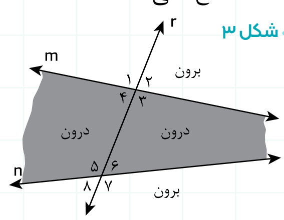


شکل ۲

هر آنچه را که در بالا توضیح دادیم، مقدمه‌ای برای یکی از مهم‌ترین اصل‌های هندسهٔ اقلیدسی است که آن را «اصل پنجم اقلیدس» می‌نامند.

داستان از اینجا شروع می‌شود که **اقلیدس** حدود دو هزار سال قبل هندسه‌ای را بنا می‌کند که امروز به نام هندسهٔ اقلیدسی معروف است و همین هندسه‌ای است که از ابتدایی تا آخر متوسطه با آن سروکار داریم.

این هندسه، اصلی را مطرح می‌کند که آن را اصل پنجم اقلیدس یا «اصل توازی» می‌نامند. برای آنکه بفهمیم اقلیدس چه چیزی را مطرح می‌کند، به بیان مقدماتی نیاز داریم. در شکل ۳، خط r دو خط m و n را قطع کرده است. در این صورت خط r را «خط قاطع» می‌نامند.

شکل ۳


خطی را که دو یا بیشتر خط‌های هم‌صفحهٔ خود را در نقطه‌های متمایز قطع کند، خط قاطع می‌نامند.

در شکل ۳، خط r دو خط m و n را قطع کرده و هشت زاویه را که از شمارهٔ ۱ تا ۸ برچسب‌گذاری شده‌اند، ساخته است.

زاویه‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ که قسمتی از درون آن‌ها بین دو خط m و n واقع‌اند و آن‌ها را «زاویه‌های درونی» و زاویه‌های ۱، ۲، ۷ و ۸ را که درون آن‌ها بیرون دو خط هستند، «زاویه‌های برونی» می‌نامند.

زاویه‌های درونی را که مجاور نیستند و در دو طرف خط قاطع واقع‌اند، **زاویه‌های متبادل داخلی** می‌نامند؛ مانند $\angle ۴$ و $\angle ۶$ و همچنین $\angle ۳$ و $\angle ۵$.

زاویه‌های درونی را که مجاور نیستند و در یک طرف خط قاطع واقع‌اند، **زاویه‌های متقابل داخلی** می‌نامند؛ مانند $\angle ۴$ و $\angle ۵$ و همچنین $\angle ۳$ و $\angle ۶$.

زاویه‌های غیرمجاور را که در یک طرف خط قاطع و یکی درونی و دیگری برونی باشند **زاویه‌های متناظر** می‌نامند؛ مانند $\angle ۱$ و $\angle ۵$، $\angle ۸$ و $\angle ۴$، $\angle ۶$ و $\angle ۲$ یا $\angle ۷$ و $\angle ۳$.

زاویه‌های غیرمجاور خارجی را که در دو طرف خط قاطع واقع‌اند، **زاویه‌های متبادل خارجی** می‌نامند؛ مانند $\angle ۱$ و $\angle ۷$ یا $\angle ۲$ و $\angle ۸$.

اکنون که با زاویه‌های پدید آمده توسط یک خط قاطع که دو خط دیگر را قطع کرده است آشنا شدیم، یکی از مهم‌ترین ویژگی‌ها در مورد خط‌های موازی را بیان می‌کنیم. این ویژگی یا بهتر بگوییم این اصل، اساس بنا نهادن هندسهٔ اقلیدس است. در واقع این به‌نوعی معادل همان اصلی است که اقلیدس بیان کرد؛ اما صورت ساده‌تری دارد. آنچه لازم است بفهمیم چنین است:

زاویه‌هایی که توسط دو خط موازی و یک خط قاطع شکل می‌گیرند، یا اندازه‌های برابر دارند یا مکمل‌اند.

اصل زاویه‌های متقابل داخلی

هرگاه خط قاطعی دو خط موازی را قطع کند، آن‌گاه زاویه‌های متقابل داخلی مکمل‌اند.

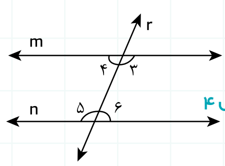
اگر: $m \parallel n$ و r دو خط m و n را قطع کند (شکل ۴)، آنگاه $\angle ۳$ و $\angle ۶$ و همچنین $\angle ۴$ و $\angle ۵$ مکمل‌اند؛ یعنی:

$$m\angle ۴ + m\angle ۵ = ۱۸۰^\circ$$

و

$$m\angle ۳ + m\angle ۶ = ۱۸۰^\circ$$

اکنون بیان اقلیدس را بهتر متوجه می‌شویم.

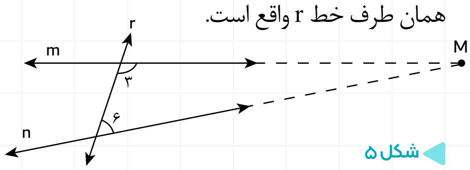


شکل ۴

اقلیدس این اصل را به‌صورت دیگری بیان کرد که چنین است:

اصل پنجم اقلیدس: هرگاه در صفحه، خط قاطعی دو خط را قطع کند و مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ متقابل داخلی در یک طرف قاطع کوچک‌تر از ۱۸۰° باشد، آنگاه این دو خط در همان طرف قاطع، یکدیگر را قطع می‌کنند.

در شکل ۵، خط r دو خط m و n را قطع کرده است و داریم $m\angle ۳ + m\angle ۶ < ۱۸۰^\circ$. در این صورت خط‌های m و n یکدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کنند که در همان طرفی از خط r قرار دارد که یکی از ضلع‌های زاویه‌های $\angle ۳$ و $\angle ۶$ نیز در همان طرف خط r واقع است.



شکل ۵

با کمی تفکر شاید بتوانید رابطه‌ای بین دو اصل بالا پیدا کنید. البته اینکه از یکی دیگری را نتیجه بگیریم، در حال حاضر ساده نخواهد بود. اما چرا اصل زاویه‌های متقابل داخلی را در کتاب‌های درسی مطرح می‌کنند، در حالی که اصل پنجم اقلیدس را مطرح نمی‌کنند؟

پاسخ به این پرسش ساده است. در سال‌های اولیه که دانش‌آموزان با مفهوم‌های جدید آشنا می‌شوند، مسلماً بیان مفهوم‌ها با زبان ساده‌تر و کاربردی‌تر از توصیه‌های آموزشگران ریاضی است. مشاهده خواهیم کرد که اصل زاویه‌های متقابل داخلی هم ساده‌تر و هم کاربردی‌تر است. اما به کار بردن خود اصل پنجم به همین صورت ساده نیست و به‌کاربردن آن در حل مسئله‌ها و قضیه‌ها مشکل‌تر است.

اصل پنجم اقلیدس، یکی از جذاب‌ترین مسئله‌هایی است که در حدود بیش از دو هزار سال تعداد زیادی از ریاضی‌دان‌ها در صدد اثبات آن از روی اصل‌های دیگر برآمده‌اند. در این میان می‌توان از **خیام** و **خواجه نصیرالدین‌طوسی**، ریاضی‌دان‌های ایرانی نیز نام برد. اما همهٔ این تلاش‌ها با شکست روبه‌رو شدند. این اصل با بقیهٔ اصل‌ها متفاوت بود. خود اقلیدس هم تا زمانی که مجبور نمی‌شد، از این اصل استفاده نمی‌کرد.

در هر دوره از تاریخ که ریاضی‌دان‌ها به بررسی هندسه پرداخته‌اند، همواره چهار اصل اول اقلیدس را به‌سادگی پذیرفته‌اند، اما اصل پنجم تا قرن نوزدهم همواره مورد شک و تردید بوده است. البته همین شک و تردیدها بود که موجب پیدایش هندسه‌هایی به غیر از هندسهٔ اقلیدسی

شـــد که به «هندســـه‌های نااقلیدسی» معروف هستند. دو مثالی که دربارهٔ صفحهٔ کـــروی و نقطه‌های درون یـــک دایره در ابتدای این بخش مطرح کردیم، مثال‌هایی از این هندسه‌ها هســـتند. اینکه چگونه این هندسه‌ها با اصل توازی ارتباطی پیدا می‌کنند، بحث مفصلی اســـت که هرچه جلوتر می‌رویم، واضح‌تر خواهد شد.

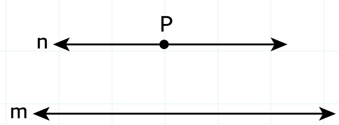
در طول این قرن‌هـــا ریاضی‌دان‌ها حتی سعی کردند، صورت ساده‌تری را جایگزین اصل پنجم کننـــد. در این تلاش‌ها ظاهراً خواجه نصیرالدین طوســـی، دانشـــمند ایرانی، اولین کسی بود که به رابطهٔ اصل پنجم و اینکه مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث 180° است، پی برد. در شماره‌های آینده نشان خواهیم داد که چگونه آن را ثابت می‌کنیم. افراد دیگری، از جمله **لژاندر**، **ساکری**، **لامبـــرت** و **والیس** نیز چنین کوشـــش‌هایی را انجام دادند اما هیچ‌کدام به نتیجه‌ای نرسیدند.

در ســـال ۱۷۹۵، ریاضی‌دانی به نام **جان پلی‌فر**، یک کتاب درسی هندسهٔ مقدماتی نوشت که چندین بار چاپ شد.

در این کتاب پلی فر صورت معادلی برای اصل پنجم بیان کرد که درک آن بســـیار ســـاده اســـت و هنوز هم در بســـیاری از کتاب‌های درســـی دنیا به‌کار می‌رود. این اصل جایگزین اصل پنجم شد که به این صورت است؛

اصل پلی‌فر: از نقطهٔ p غیر واقع بر خط m، یک و تنها یک خط می‌توان به موازات خط m رسم کرد.

همان‌طور که در شکل ۶ می‌بینید، یک و تنها یک خط n از نقطهٔ p به موازات خط m می‌توان رسم کرد.



شکل ۶

شـــاید ابتدا فکر کنید که تاکنون سه نوع اصل را در ارتباط با خط‌های موازی بیان کرده‌ایم، چگونه این‌ها بـــا هم در ارتباط هســـتند. اما ثابت می‌شود که هر کدام از این سه اصل را به‌نوعی بپذیریم، می‌توانیم بقیه را ثابت کنیم که البته در حال حاضر وارد این بحث‌ها نخواهیم شد.

نکتـــهٔ جالبی که از اصـــل پلی‌فر می‌توان دریافت این است که شناخت هندسه‌های نااقلیدسی را ساده‌تر می‌کند.

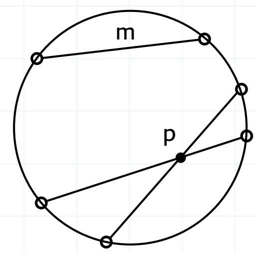
در واقع بعداً ریاضی‌دان‌های معروفی مانند **لباچفسکی** و **بویایی** و **گاوس** دریافتند که اصل پنجم قابل اثبات نیست، بلکه در دنیای خودش برقرار اســـت. اگر بپذیریم که از هر نقطـــهٔ غیرواقع بر یک خط، یک و تنها یک خط نمی‌تـــوان به موازات خط مفروض رســـم کرد، یا از هر نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، هیچ خطی نمی‌توان به موازات آن رسم کرد، یا از هر نقطهٔ غیرواقع بر یک خط بیش از یک خط به موازات آن می‌توان رســـم کرد، هر یک از این سه اصل خود به هندسه‌ای متفاوت با دیگری منجر می‌شود.

در واقع، اگر نقطـــهٔ p غیرواقع بر خط m مفروض باشد:

۱. اگـــر بپذیریم که از نقطهٔ p یک و فقط یک خط به موازات m رســـم می‌شود، آن را «هندسهٔ اقلیدسی» می‌نامیم؛ هندسه‌ای که شما با آن آشنا هستید.

۲. اگر بپذیریم که از نقطهٔ p هیچ خطی به موازات m رسم نمی‌شود، آن را «هندسهٔ بیضوی» می‌نامند که حالتی از آن، همان هندسهٔ روی کره اســـت که قبلاً توضیح دادیم.

۳. اگر بپذیریم که از نقطهٔ p بیش از یک خط به موازات خط m رسم می‌شود، آن را «**هندسهٔ هذلولوی**» می‌نامند که مثالی از آن را در مورد نقطه‌های درون یک دایره بیان کردیم.



شکل ۷

در حقیقت بعد از ۱۸۰۰ سال، ریاضی‌دان‌ها دریافتند که چرا نباید به دنبال اثبات اصل پنجم اقلیدس بروند. در واقع ما سه دنیای متفاوت داریم که هر کدام هندسهٔ خودش را دارد.

داستان کشف هندسه‌های نااقلیدسی بسیار جالـــب و آموزنده اســـت. ریاضی‌دان‌هایی وجود دارند که ســـال‌های زیادی از عمر خود را صرف کشف این هندسه‌ها کردند. بعضی موفق نشـــدند، اما بعضی هم موفق شدند. مثلاً، ریاضی‌دانی به نام **فورکوش بویایی** ۳۰ سال از عمر خود را روی این کار گذاشت و موفق نشد. در عوض پسر او، **یانوش بویایی**، موفق به چنین کاری شد. نامه‌ای از پدر به پسر وجود دارد که بسیار آموزنده است. پدر به پسر می‌نویسید: «تو نباید برای گام نهادن در راه موازی‌ها تلاش کنی. من پیچ‌وخم‌های این راه را از اول تا آخر می‌شناسم، راه به جایی نخواهی برد.» اما بویایی جوان از اخطار پدر نهراسید، زیرا که اندیشه‌ای کاملاً تازه در سر می‌پروراند و در انتها موفق شد.

اکنون که خیلی خلاصه در مورد داســـتان خط‌های موازی مطالبی را بیان کردیم، به بحث اصلی بر می‌گردیم و در این راستا اگر لازم باشد، توضیح‌هایی را خواهیم داد.

بعد از کشف هندسه‌های نااقلیدسی و اینکه تکلیف اصل پنجم روشـــن شـــد، از اوایل قرن بیســـتم به بعد، ریاضی‌دان‌ها به فکر ساختاری اساسی برای هندسهٔ اقلیدسی و به‌ویژه هندسهٔ دبیرستانی افتادند. **هیلبرت** اولین ریاضی‌دانی بود که هندسهٔ اقلیدسی را از نو بازسازی کرد. او نقص‌های کار اقلیدس را در مورد این هندسه برطرف کرد و حتی اصل‌های جدیدی را به این هندسه افزود.

از ســـال ۱۹۶۰، ریاضی‌دان‌های دیگری نیز ساختارهای ساده‌تری را برای هندسه مطرح کردند.

در سال ۲۰۰۰، «انجمن بین‌المللی معلمان ریاضی» که به اختصار (NCTM) نامیده می‌شـــود، توصیه‌هایی کلـــی در آموزش ریاضی و به‌ویژه در هندسه مطرح کردند که هنوز هم در اکثر کتاب‌های درسی هندسه از آن‌ها استفاده می‌شود.

همچنین، دســـته اصل‌هایی به نام «پروژهٔ ریاضیات مدرســـه‌ای دانشـــگاه شیکاگو» مطرح می‌شوند که در آن‌ها توصیه می‌شود، به جای اصل پنجم در هندسهٔ مدرسه‌ای، اصل زاویه‌های «متقابل داخلی» یا «متبادل داخلی» مطرح شـــود. ایـــن توصیه از نظر آموزشی مفید به نظر می‌رسد و کار ساختن هندســـه را در ریاضیات مدرسه‌ای ساده‌تر می‌کنـــد. در بخش بعدی از آن اســـتفاده می‌کنیم و هندسه را پیش خواهیم برد.

با اسکن رمزینه، مراحل ترسیمات هندسی را مشاهده کنید.